

**École Centrale de Paris, École Centrale de Lyon,
École supérieure d'électricité, École supérieure d'optique
Concours commun Centrale - Supélec**

Première épreuve
Options MP'

6655

Dans tout le problème f désigne une application de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

PARTIE I.

Dans cette partie on suppose que f est continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Pour $x > 0, k \geq 0, n \geq 0, k$ et n entiers, on pose :

$$c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t) dt \qquad C_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x)$$

$$d_k(x) = f(x+k+1) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t) dt \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^n d_k(x)$$

1° a) Interpréter géométriquement $c_k(x)$ et $C_n(x)$.

b) Établir l'inégalité $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$.

En déduire que la série de terme général $c_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)$$

vérifie l'inégalité $C(x) \leq f(x)$.

2° Après en avoir justifié l'existence, déterminer $C(x)$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

3° Montrer que la série de terme général $d_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et exprimer sa somme

$$D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x)$$

au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

- 4° a) Montrer que la fonction $C : x \rightarrow C(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 b) Étudier le comportement de C en $+\infty$.

5° On suppose dans cette seule question que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

- a) Montrer que :

$$\int_x^{x+1} f(t) dt$$

est négligeable devant $f(x)$ quand x tend vers 0.

- b) En déduire que $C(x)$ et $f(x)$ sont équivalents quand x tend vers 0.

PARTIE II.

Dans cette partie, on conserve les hypothèses faites sur f dans l'introduction de la PARTIE I, auxquelles on ajoute l'hypothèse supplémentaire suivante : f est de classe \mathcal{C}^1 et convexe, c'est-à-dire à *dérivée f' croissante*.

- 1° Montrer que $f'(x)$ a une limite, que l'on précisera, lorsque x tend vers $+\infty$.

- 2° Montrer que la fonction C est de classe \mathcal{C}^1 et décroissante (on pourra utiliser la fonction $g = f'$).

- 3° Pour $x > 0$ et k entier, on pose :

$$u_k(x) = \frac{1}{2} [f(x+k) + f(x+k+1)] - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t) dt, \quad k \geq 0$$

$$v_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t) dt, \quad k \geq 1$$

- a) Interpréter géométriquement $u_k(x)$ et $v_k(x)$.

- b) Montrer que pour tout $x > 0$ les séries de termes généraux $u_k(x)$ et $v_k(x)$ sont convergentes et exprimer leurs sommes

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{et} \quad V(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$$

au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

- 4° Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\frac{1}{2} f(x) \leq C(x) \leq f(x) - \int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t) dt.$$

- 5° a) Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$.

(ii) $f(x)$ et $f(x+1)$ sont équivalents.

- b) Les conditions (i) et (ii) étant supposées remplies, montrer que, quand x tend vers $+\infty$, on a :

$$C(x) \sim \frac{1}{2} f(x)$$

- c) Donner un exemple de fonction f satisfaisant à ces conditions.

- 6° a) Pour $f(x) = e^{-x}$, que peut-on dire du rapport $\frac{C(x)}{f(x)}$?

- b) Montrer que, pour tout $m \in]\frac{1}{2}, 1[$, il existe une fonction f telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{f(x)} = m$$

PARTIE III.

Dans cette partie, où f vérifie les hypothèses de l'introduction de la PARTIE I, on utilisera, sans le démontrer, le résultat classique suivant :
la suite de terme général

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n \geq 1)$$

admet une limite finie λ ($0 < \lambda < 1$), appelée constante d'Euler, lorsque n tend vers $+\infty$.

On pose, pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, k et n entiers :

$$\gamma_k(x) = xf((k+1)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t) dt, \quad \Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^n \gamma_k(x)$$

$$\delta_k(x) = xf((k+2)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t) dt, \quad \Delta_n(x) = \sum_{k=0}^n \delta_k(x)$$

1° a) Interpréter géométriquement $\gamma_k(x)$ et $\Gamma_n(x)$.

b) En posant $f_x(u) = xf(ux)$, montrer que la série de terme général $\gamma_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k(x)$$

est une fonction continue de x sur $]0, +\infty[$.

2° Montrer que la série de terme général $\delta_k(x)$ converge pour tout $x > 0$.

Calculer sa somme

$$\Delta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(x)$$

en fonction de $\Gamma(x)$ et de $f(x)$.

3° On suppose dans cette question que $xf(x)$ a une limite finie, A , quand x tend vers 0. Montrer que $\Gamma(x)$ tend vers $A\lambda$ quand x tend vers 0.

4° On suppose dans cette question que

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Montrer que

$$\Gamma(x) = -\ln(1 - e^{-x}) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Montrer que

$$\ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

admet une limite, que l'on déterminera, lorsque x tend vers 0.

c) Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x+k)}}{x+k} \text{ converge normalement sur } [0, +\infty[.$$

d) Donner un développement asymptotique à trois termes significatifs de $C(x)$ (C a été définie en I) lorsque x tend vers 0.

Centrale - Supélec 93

I.1.a

$c_k(x)$ est l'aire hachurée sur la figure

ci-contre. $C_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x)$ sera

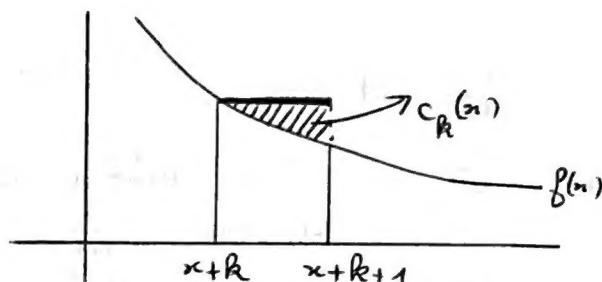
l'aire située entre la courbe représen-

tative de la fonction en escalier $\varphi : [x, x+n+1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie

par

$$\forall k \quad \forall y \in [x+k, x+k+1] \quad \varphi(y) = f(x+k)$$

, entre le graphe de f et les 2 droites verticales $X=x$ et $X=x+n+1$.



I.1.b

* La décroissance de f permet d'écrire :

$$\forall t \in [x+k, x+k+1] \quad f(x+k+1) \leq f(t) \leq f(x+k)$$

d'où en intégrant :

$$f(x+k+1) \leq \int_{x+k}^{x+k+1} f(t) dt \leq f(x+k)$$

$$0 \leq c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t) dt \leq f(x+k) - f(x+k+1)$$

* Sommons les inégalités précédentes :

$$\sum_{k=0}^n c_k(x) \leq \sum_{k=0}^n f(x+k) - f(x+k+1) = f(x) - f(x+n+1) \leq f(x)$$

$\sum_k c_k(x)$ est donc une série à termes positifs, majorée par $f(x)$.
Elle convergera vers $C(x)$ et l'on aura (passage à la limite) :

$$\forall x > 0 \quad C(x) \leq f(x)$$

I.2.1

e^{-x} et $\frac{1}{x(x+1)}$ sont continues, positives décroissantes et de limite 0 en $+\infty$. On applique la question précédente.

$$a) \quad c_k(x) = e^{-x-k} - \int_{x+k}^{x+k+1} e^{-t} dt = e^{-x-k} - \left[\frac{e^{-t}}{-1} \right]_{x+k}^{x+k+1} = e^{-(x+k+1)}$$

$$\text{donc } C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(x+k+1)} = e^{-(x+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = e^{-x-1} \cdot \frac{1}{1-e^{-1}}$$

$$C(x) = \frac{e^{-x}}{e-1}$$

b) On peut recommencer un calcul semblable au a), avec des séries, ou bien conserver l'intégrale dans l'expression de $C_n(x)$:

$$c_k(x) = \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t(t+1)} dt$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) - \int_x^{x+n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} + \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+n+1) + \ln(x+n+2)$$

$$= \frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x+1} - \underbrace{\frac{1}{x+n+1}}_{\rightarrow 0} + \ln \underbrace{\frac{x+n+2}{x+n+1}}_{\rightarrow 0} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

D'où $C(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(x) = \boxed{\frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x+1}}$

I.3 $c_k(x) - d_k(x) = \beta(x+k) - \beta(x+k+1)$

En sommant pour k variant de 0 à n , on obtient :

$$C_n(x) - D_n(x) = \beta(x) - \beta(x+n+1)$$

$$D_n(x) = C_n(x) - \beta(x) + \beta(x+n+1)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(x) = C(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(x+n+1) = 0$, on aura :

$$\lim D_n(x) = C(x) - \beta(x)$$

La série $\sum_{k \geq 0} d_k(x)$ converge et

$$\boxed{D(x) = C(x) - \beta(x)}$$

I.4.a

$$|C(x) - C_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta(x+k) = \beta(x+n+1) \leq \beta(x)$$

et $\beta(x)$ tend vers 0 indépendamment de x . Cela prouve la convergence uniforme de $C_n(x)$ vers $C(x)$ pour $x > 0$.

Comme $c_k(x)$ est continue en x pour tout k , $C_n(x)$ sera continue sur \mathbb{R}_+^* et $C(x)$ sera continue sur \mathbb{R}_+^* comme la limite uniforme de la suite de fonctions continues $(C_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

I.4. b

1^{re} solution: De $0 \leq C(n) \leq \beta(x)$ on déduit par passage à la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(n) = 0$

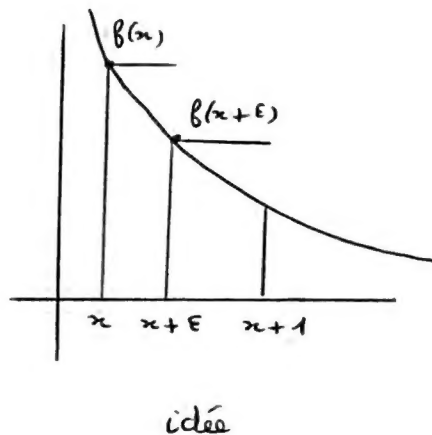
2^e solution: $(C_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $C(x)$ sur \mathbb{R}_+^* pour n tendant vers $+\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} C_n(x) = 0$ pour tout n . Le Th. d'interversion des limites assure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 0$$

I.5. a

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\varepsilon < 1$.
On a :

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = \underbrace{\int_x^{x+\varepsilon} f(t) dt}_{\leq \varepsilon f(x)} + \underbrace{\int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(t) dt}_{\leq (1-\varepsilon) f(x+\varepsilon)}$$



puisque f est décroissante. Par suite :

$$0 \leq \frac{\int_x^{x+1} f}{f(x)} \leq \varepsilon + (1-\varepsilon) \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \quad (*)$$

ε étant fixé, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+\varepsilon) = f(\varepsilon)$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, d'où :

$$\exists \eta \quad 0 \leq x < \eta \Rightarrow 0 \leq \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

et (*) entraîne

$$0 \leq \frac{\int_x^{x+1} f}{f(x)} \leq 2\varepsilon$$

dès que $0 \leq x < \eta$. On a prouvé que $\int_x^{x+1} f(t) dt = o(f)$.

I.5.b On a

$$C(x) = f(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt + \sum_{k \geq 1} c_k(x) \quad (*)$$

Si $k \geq 1$, $x \mapsto c_k(x)$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$. La convergence de $\sum_{k \geq 1} c_k(x)$ étant uniforme, $x \mapsto \sum_{k \geq 1} c_k(x)$ sera continue sur $[0, +\infty[$ donc majorée par une constante au voisinage de 0. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k \geq 1} c_k(x)}{f(x)} = 0$.

Compte tenu de I.5. b, (*) entraîne :

$$C(x) = f(x) + o(f(x))$$

ie

$$C(x) \sim_0 f(x)$$

II.1

f décroît, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) \leq 0$. (preuve: si l'on avait $x \in \mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x_0) > 0$, f' étant continue on pourrait trouver η et un intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ sur lequel f' soit > 0 . Mais f serait strictement croissante sur cet intervalle. C'est absurde.)

f' est croissante, majorée par 0, donc converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_-$.

Si l'on avait $l < 0$, le Th. des accroissements finis montrerait pour $x_0 < x$:

$$f(x) - f(x_0) < \sup_{[x_0, x]} f'(t) (x - x_0) \leq \underbrace{l (x - x_0)}_{\substack{\rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}}$$

ce qui entraîne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, absurde.

$\text{Ccl : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f' = 0$

II.2 $C(x) = \sum_{k \geq 0} c_k(x)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ et chaque fonction c_k est dérivable. On a :

$$\begin{aligned} C'_n(x) &= \sum_{k=0}^n c'_k(x) = \left(\sum_{k=0}^n f'(x+k) \right) - f(x+n+1) + f(x) \\ &= \sum_{k=0}^n f'(x+k) - \int_x^{x+n+1} f'(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n g(x+k) - \int_x^{x+n+1} g(t) dt \quad (*) \end{aligned}$$

On peut utiliser la partie I avec $-g$ à la place de f . $-g$ est bien croissante, continue et tend vers 0 si $x \rightarrow +\infty$. Vu (*), et I. 4, on obtient :

$(C'_n(x))_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$

On applique le Théorème :

Th : (f_n) suite de fonctions de classe C^1 , $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, I int. de \mathbb{R} . Si :

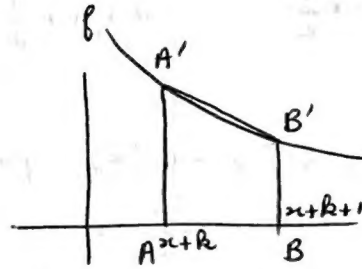
1) (f_n) converge vers f sur I

2) (f'_n) converge uniformément vers g sur I ,

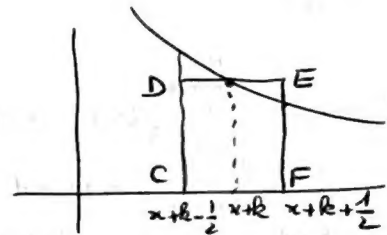
Alors (f_n) converge uniformément sur toute partie bornée de I , f est de classe C^1 et $f' = g$.

(*) montre que $C'_n(n) \leq 0$ pour tout n , donc en passant à la limite $C'(n) \leq 0$, et C sera décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

II.3.a



(fig 1)



(fig 2)

$u_k(n)$ est la différence entre l'aire du trapèze $AA'B'B$ et l'aire sous la courbe de f pour $t \in [x+k, x+k+1]$ (fig.1)

$v_k(n)$ est la différence entre l'aire du rectangle $CDEF$ et la courbe de f pour $t \in [x+k-\frac{1}{2}, x+k+\frac{1}{2}]$ (fig.2)

II.3.b

* $\frac{1}{2} (c_k(n) + d_k(n)) = u_k(n)$ donc $\sum u_k(n)$ sera convergente

vers :

$$U(n) = \frac{1}{2} (C(n) + D(n)) = \boxed{C(n) - \frac{1}{2} f(x)} \quad \text{I.3}$$

$$* \quad c_k(n) - v_k(n) = \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f - \int_{x+k}^{x+k+1} f$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (c_k(n) - v_k(n)) &= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+n+\frac{1}{2}} f - \int_{n+1}^{n+n+1} f \\ &= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f - \int_{n+n+\frac{1}{2}}^{n+n+1} f \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f + \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f$$

Comme $\sum_{k=1}^n c_k(x)$ converge vers $C(x) - c_0(x)$ pour $n \rightarrow +\infty$,

et comme $0 \leq \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(t) dt \leq \underbrace{f(x+n+\frac{1}{2})}_{\rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow +\infty)} \cdot \frac{1}{2}$, on

aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(t) dt = 0$ et l'égalité précédente prouve que

$\sum_{k \geq 1} v_k(x)$ converge vers :

$$\begin{aligned} V(x) &= C(x) - c_0(x) - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f \\ &= C(x) - f(x) + \int_x^{x+1} f - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f \end{aligned}$$

$$\boxed{V(x) = C(x) - f(x) + \int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t) dt}$$

II.4

* f est convexe donc la corde $[A'B']$ de la fig. 1 est au dessus de la courbe de f , ce qui entraîne $v_k(x) \geq 0$ pour tout k et :

$$V(x) \geq 0 \Leftrightarrow C(x) \geq \frac{1}{2} f(x)$$

d'après II.3.

* Remarque $C(n) \leq f(n) - \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt$ revient à prouver que $V(n) \leq 0$, ce qui est assuré si l'on prouve que $v_k(n) \leq 0$ pour tout $k \geq 1$.

f étant convexe, son graphe est situé au-dessus de la tangente en n'importe laquelle de ses tangentes, et donc :

$$f(t) \geq f'(n+k)(t - (n+k)) + f(n+k) \quad (\text{cf fig. 2})$$

$$\int_{n+k-\frac{1}{2}}^{n+k+\frac{1}{2}} f(t) dt \geq f'(n+k) \underbrace{\int_{n+k-\frac{1}{2}}^{n+k+\frac{1}{2}} (t - (n+k)) dt}_{=0 \text{ (à calculer)}} + f(n+k)$$

$$v_k(n) = f(n+k) - \int_{n+k-\frac{1}{2}}^{n+k+\frac{1}{2}} f(t) dt \leq 0$$

CQFD.